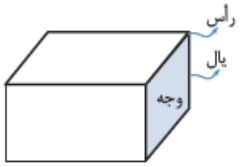
مفاهیم اولیه‌ی اشکال فضایی

چندوجهی: بخشی از فضاست که از همه طرف به تعدادی صفحه محدود شده باشد.

وجه: بخش‌هایی از صفحه‌ها که چندوجهی را پدید می‌آورند سطوحی با محیط چندضلعی به وجود می‌آورند که این چندضلعی‌ها وجه نام دارد.

چندوجهی‌منتظم: یک چندوجهی است که هر وجه‌اش چندضلعی منتظم همنهشت و زوایه‌ی فضایی بین صفحات مجاور آن یکسان باشد. مانند مکعب که هر وجه آن مربع است.

یال: ضلع‌های هر یک از وجه‌های چندوجهی را یال و رئوس این وجه‌ها را رأس می‌نامند.

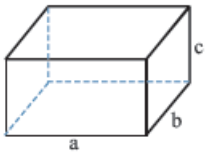


عدد حجم: فضای اشغال‌شده توسط یک چندوجهی را عدد حجم آن چندوجهی می‌نامند به طور اختصار عدد حجم را با «حجم» بیان می‌کنند.

حجم هر چندوجهی همواره عدد مثبت است.

مکعب مستطیل

یک شش‌وجهی است که تمامی وجوه آن مستطیل است. هر دو وجه روبه‌روی هم، دو مستطیل موازی و مساوی می‌باشند. ۱۲ یال، ۸ رأس و ۴ قطر همرس و منصف یکدیگر دارد.



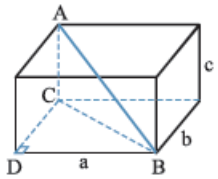
اگر طول، عرض و ارتفاع مکعب‌مستطیل را به ترتیب a، b و c بنامیم، داریم:

مساحت جانبی آن برابر است با: $S_{\text{جانبی}} = ۲(bc) + ۲(ac)$

مساحت کل برابر است با: $S_{\text{کل}} = ۲(ab + ac + bc)$

حجم برابر است با: $V = abc$

قطر: اگر دو رأس یک مکعب‌مستطیل که در یک وجه قرار نداشته باشند را به یکدیگر وصل نماییم، قطر مکعب‌مستطیل به دست می‌آید.

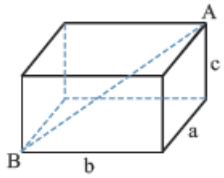


$BC^۲ = DC^۲ + DB^۲$

$\overset{\Delta}{BDC}: BC^۲ = b^۲ + a^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{a^۲ + b^۲}$

$\overset{\Delta}{ABC}: AB^۲ = BC^۲ + AC^۲ \Rightarrow AB^۲ = (\sqrt{a^۲ + b^۲})^۲ + c^۲ \Rightarrow AB^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ \Rightarrow AB = \sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}$

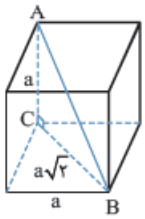
مثال: در شکل روبه‌رو اگر $AB = ۸\ cm$، $a = ۲\sqrt{۳}\ cm$ و $b = ۴\ cm$ باشد، حجم مکعب‌مستطیل را محاسبه کنید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*



$AB = \sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲} \Rightarrow (۸)^۲ = (\sqrt{(۲\sqrt{۳})^۲ + ۴^۲ + c^۲})^۲ \Rightarrow ۶۴ = ۱۲ + ۱۶ + c^۲ \Rightarrow c^۲ = ۳۶ \Rightarrow c = ۶$

$V = a \cdot b \cdot c = ۲\sqrt{۳} \times ۴ \times ۶ = ۴۸\sqrt{۳}$

مکعب



مکعب یک شش‌وجهی است که تمام وجوه آن مربع است هر مکعب به ضلع a، ۱۲ یال، ۸ رأس و ۴ قطر دارد.

قطرهای مکعب با هم برابرند.

مساحت جانبی آن برابر است با: $۴a^۲$

مساحت کل برابر است با: $۶a^۲$

حجم مکعب برابر است با حاصل‌ضرب اندازه‌ی سه یال آن یعنی: $V = a \times a \times a = a^۳$

اندازه‌ی قطر مکعب برابر است با:

$\overset{\Delta}{ABC}: AC^۲ + BC^۲ = AB^۲ \Rightarrow a^۲ + (a\sqrt{۲})^۲ = AB^۲$

$a^۲ + ۲a^۲ = AB^۲ \Rightarrow AB = a\sqrt{۳}$ طول قطر مکعب

مثال: مکعبی داریم به طول قطر $۳\sqrt{۳}$، حجم این مکعب چه‌قدر است؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

طول قطر مکعب $= a\sqrt{۳}$

$a\sqrt{۳} = ۳\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۳$

$V = a^۳ \Rightarrow V = ۳^۳ = ۲۷$

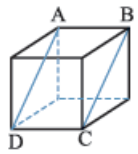
مسائل

۱- اگر طول قطر وجه یک مکعب ۵ باشد، مساحت کل آن چه‌قدر است؟ *(تمرین کتاب درسی)*

۲- اگر طول قطر مکعبی را ۳ برابر نماییم، حجم آن چه تغییری می‌کند؟

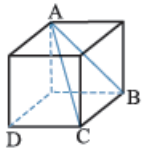
۳- اگر طول هر ضلع مکعب ۱ سانتی‌متر و نقطه‌ی O از همه‌ی رأس‌ها به یک فاصله باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی O تا یک رأس مکعب را حساب کنید.

۴- در مکعب روبه‌رو مساحت چهارضلعی ABCD برابر $۳\sqrt{۲}$ است. سطح کل مکعب را به دست آورید.

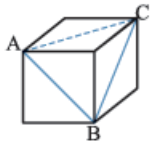


۵- قاعده‌ی یک مکعب‌مستطیل، مربعی به مساحت ۹ است. اگر قطر این مکعب‌مستطیل $\sqrt{۳۴}$ باشد، حجم این مکعب‌مستطیل چه‌قدر است؟

۶- اگر اندازه‌ی ضلع مکعب مقابل ۲ باشد، مساحت مثلث ABC چه‌قدر است؟

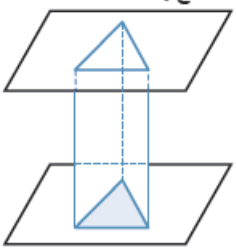


۷- در شکل مقابل که یک مکعب است، اندازه‌ی زاویه‌ی ABC چند درجه است؟



منشور

منشور، یک چندوجهی است که دو وجه آن همنهشت بوده و در دو صفحه‌ی موازی قرار گیرند و وجوه دیگر متوازی‌الاضلاع باشند.



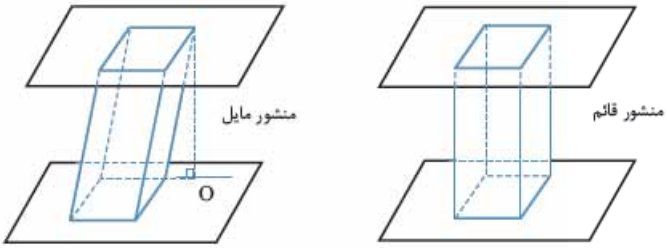
مشخصات منشور:

- دو وجه همنهشت منشور که در دو صفحه‌ی موازی قرار می‌گیرند، قاعده‌های منشور نام دارند.
- وجه‌های دیگر که همگی متوازی‌الاضلاع هستند، وجه‌های جانبی نام دارند.
- محل تلاقی وجه‌های جانبی، یال‌های جانبی نام دارند که همگی با هم موازی‌اند.
- ارتفاع منشور پاره‌خطی است که صفحه‌های دو قاعده را به هم وصل کرده و بر هر دو صفحه عمود است.

دو نوع منشور داریم:

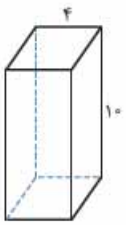
منشور قائم، اگر یال‌های جانبی بر قاعده‌های منشور عمود باشند، منشور قائم است.

منشور مایل، اگر یال‌های جانبی بر قاعده‌های منشور عمود نباشند، آن را منشور مایل می‌نامند.



نام‌گذاری منشور براساس شکل چندضلعی قاعده‌های آن صورت می‌گیرد. اگر قاعده مثلث باشد، منشور مثلثی و اگر قاعده چهارضلعی باشد، منشور چهارضلعی نام دارد.

مثال: اگر قاعده‌ی یک منشور قائم مربعی به طول ضلع ۴ سانتی‌متر و ارتفاع ۱۰ سانتی‌متر باشد، مساحت جانبی و مساحت کل منشور را به دست آورید.



پاسخ: مساحت جانبی شامل چهار مستطیل به ابعاد ۴×۱۰ است و مساحت کل، مساحت دو مربع به ابعاد ۴×۴ به اضافه‌ی مساحت جانبی است.

$S_{جانبی} = ۴(۴\times۱۰) = ۱۶۰$ $\qquad$ $S_{کل} = ۱۶۰ + ۲(۴\times۴) = ۱۹۲$

مساحت جانبی منشور: برابر است با محیط قاعده در ارتفاع آن.

مساحت کل منشور: برابر است با مجموع مساحت‌های دو قاعده به اضافه‌ی مساحت جانبی منشور

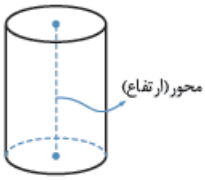
حجم منشور: برابر است با حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن.

استوانه

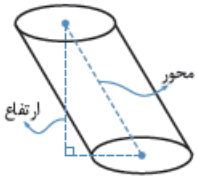
اگر تعداد ضلع‌های چندضلعی خیلی زیاد گردد، قاعده‌ی منشور به دایره نزدیک می‌شود در نتیجه منشور حاصل به یک شکل فضایی که قاعده‌ی آن دایره است تبدیل می‌شود این شکل فضایی را استوانه گویند.

در نتیجه استوانه شکل فضایی شبیه منشور است که قاعده‌های آن به جای چندضلعی، دو دایره‌ی همنهشت هستند. استوانه نیز مانند منشور بر دو نوع است.

- اگر محور استوانه یعنی پاره‌خطی که مرکزهای دو قاعده را به هم وصل می‌کند، بر قاعده عمود باشد، استوانه قائم است و در غیر این صورت استوانه مایل نام دارد.



استوانه‌ی قائم



استوانه‌ی مایل

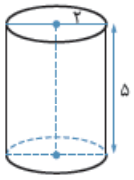
مساحت جانبی استوانه: اگر قاعده‌های استوانه‌ی قائمی را بردارید و از کنار، آن را به موازات محور برش داده و باز کنید یک مستطیل به دست می‌آید. مساحت این مستطیل، مساحت جانبی استوانه است.

مساحت کل: مجموع مساحت‌های دو قاعده‌ی استوانه (دو دایره) به اضافه‌ی مساحت جانبی، مساحت کل استوانه را نشان می‌دهد.

مثال: ارتفاع یک استوانه‌ی قائم ۵ سانتی‌متر و شعاع قاعده‌ی آن ۲ سانتی‌متر است.

الف) مساحت جانبی و مساحت کل استوانه چه‌قدر است؟

ب) حجم این استوانه را محاسبه نمایید.



مساحت جانبی استوانه، مساحت مستطیلی به عرض ۵ و طول محیط قاعده‌ی دایره‌ای‌شکل $S_{\text{جانبی}} = ۵ \times ۲ \times ۲ \times \pi = ۲۰\pi$

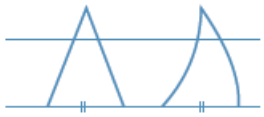
$S_{\text{کل}} = \text{مساحت جانبی} + \text{مساحت دو قاعده} = ۲۰\pi + ۲(۲^۲ \times \pi) = ۲۸\pi$

حجم استوانه نیز برابر است با حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن پس: $V = (\pi r^۲ h) = \pi \times ۲^۲ \times ۵ = ۲۰\pi$

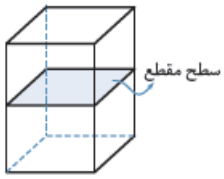
اصل کاوالیر:

- اصل کاوالیر درباره‌ی مساحت:

دو شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید اگر قاعده‌ها و ارتفاع‌های این دو شکل برابر باشند و هر خطی موازی با قاعده‌ها، در دو شکل قطعه‌هایی با طول‌های مساوی به وجود آورد. پس طبق اصل کاوالیر این دو شکل دارای مساحت‌های برابر هستند.



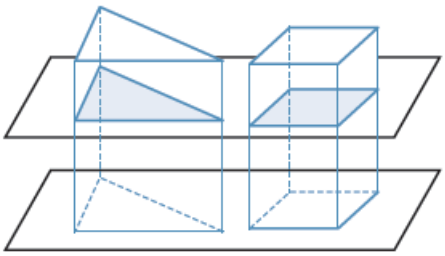
سطح مقطع شکل فضایی، شکلی است که از برخورد آن با یک صفحه به وجود می‌آید.



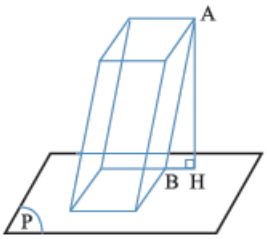
اصل کاوالیر در مورد حجم:

اگر قاعده‌های دو منشور در یک صفحه قرار گیرند و مساحت سطح مقطع‌هایی که از برخورد صفحه‌ی موازی با این صفحه حاصل شود، برابر باشد آن‌گاه حجم‌های این دو منشور برابر است.

در نتیجه طبق اصل کاوالیر، اگر مساحت قاعده‌های دو منشور هم‌ارتفاع برابر باشند، حجم‌های آن‌ها نیز برابر خواهد بود.



مثال: چرا ارتفاع منشور مایل، کوتاه‌تر از طول یال جانبی آن است؟ *(تمرین کتاب درسی)*



طبق شکل، یکی از رئوس قاعده‌ی منشور را A نامیده و عمود AH را بر صفحه‌ی قاعده‌ی دیگر رسم می‌کنیم. چون AH بر صفحه‌ی P عمود است در نتیجه بر هر خط داخل صفحه نیز مانند BH عمود است (AH ارتفاع منشور است).

مثلث ABH قائم‌الزاویه است و در هر مثلث قائم‌الزاویه طول وتر از طول اضلاع قائمه بزرگ‌تر می‌باشد؛ در نتیجه $AB > AH$.

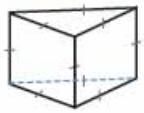
مسائل

۸- اگر قاعده‌ی یک منشور قائم، شش‌ضلعی منتظم به طول ضلع ۲ سانتی‌متر و ارتفاع آن $\sqrt{3}$ سانتی‌متر باشد، مساحت کل آن را محاسبه کنید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۹- مساحت جانبی و مساحت کل منشور قائمی که قاعده‌اش لوزی به اقطار ۶ و ۸ و یال جانبی‌اش ۱۲ باشد را به دست آورید.

۱۰- اگر قاعده‌ی یک منشور قائم، مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۸ سانتی‌متر و ارتفاع منشور ۱۲ سانتی‌متر باشد، مساحت جانبی و مساحت کل این منشور را پیدا کنید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۱۱- طول هر یال منشور قائم شکل روبه‌رو ۴ سانتی‌متر است. *(تمرین کتاب درسی)*



الف) مساحت هر کدام از وجه‌ها و قاعده‌ها را حساب کنید.

ب) ارتفاع منشور چه‌قدر است؟

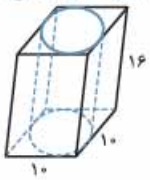
ج) حجم منشور را به دست آورید.

۱۲- دو استوانه‌ی قائم یکی به شعاع قاعده‌ی ۲ سانتی‌متر و ارتفاع ۱ سانتی‌متر و دیگری به شعاع قاعده‌ی ۱ سانتی‌متر و ارتفاع ۲ سانتی‌متر در نظر بگیرید. *(تمرین کتاب درسی)*

الف) مساحت‌های جانبی این دو استوانه را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

ب) حجم‌های این دو استوانه را پیدا کرده با هم مقایسه نمایید.

۱۳- در شکل روبه‌رو طول ضلع مکعب‌مستطیل ۱۰ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۱۶ سانتی‌متر است. *(تمرین کتاب درسی)*



الف) مساحت کل و حجم استوانه را به دست آورید.

ب) حجم ناحیه‌ی بین استوانه و مکعب‌مستطیل چه‌قدر است؟

۱۴- مستطیلی به ابعاد ۳ و ۵ را حول ضلع ۵ سانتی‌متری دوران داده‌ایم. مطلوب است:

الف) نام شکل حاصل

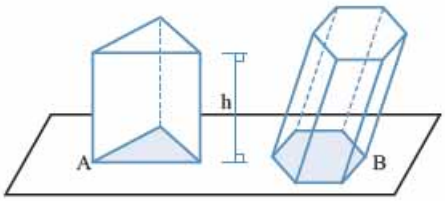
ب) مساحت کل شکل

۱۵- دو استوانه با حجم‌های مساوی مفروض‌اند. اگر مساحت قاعده‌ی یکی، سه برابر دیگری باشد، نسبت مساحت جانبی دو استوانه چه‌قدر است؟

۱۶- با استفاده از اصل کاوالیری نشان دهید دو مثلث با قاعده‌ها و ارتفاع‌های برابر، مساحت برابر دارد. (از قانون مساحت مثلث استفاده نشود)

راهنمایی: از تشابه مثلث‌ها استفاده کنید. *(تمرین کتاب درسی)*

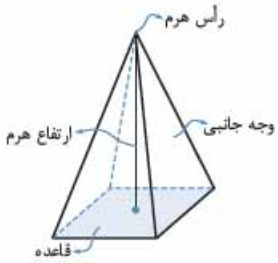
۱۷- در شکل زیر، قاعده‌های یک منشور سه‌ضلعی قائم (A) و یک منشور شش‌ضلعی مایل (B) در یک صفحه قرار گرفته‌اند. ارتفاع هر دو منشور ۷ سانتی‌متر است.



الف) اگر مساحت قاعده‌ی منشور A، ۱۰ سانتی‌متر مربع باشد، حجم آن چه‌قدر است؟ فرض کنید هر صفحه‌ای موازی با قاعده‌های این منشور، سطح مقطع‌هایی با مساحت برابر ایجاد کند. *(تمرین کتاب درسی)*

ب) حجم منشور B را به دست آورید.

هرم



هرم یک چندوجهی است که همه‌ی وجه‌های آن به‌جز یکی، در یک رأس مشترک‌اند.

قاعده، وجهی از هرم که رأس هرم در آن قرار ندارد، قاعده‌ی هرم نام دارد.

ارتفاع، ارتفاع هرم پاره‌خطی است که از رأس هرم بر قاعده‌ی آن عمود می‌شود.

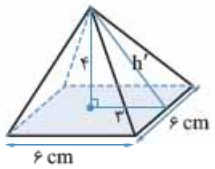
همه‌ی وجوه هرم به‌جز قاعده، وجه‌های جانبی نامیده می‌شوند وجه‌های جانبی همواره به شکل مثلث هستند.

هرم منتظم: اگر قاعده‌ی یک هرم، چندضلعی منتظم بوده و پای ارتفاع آن بر مرکز قاعده منطبق باشد، هرم را منتظم می‌نامیم.

چهاروجهی منتظم: هرمی که همه‌ی وجه‌های آن مثلث متساوی‌الاضلاع است.

حجم هرم: برابر است با حاصل‌ضرب $\frac{۱}{۳}$ مساحت قاعده در ارتفاع آن $V=\frac{۱}{۳}S_{\text{قاعده}}\times h$

مثال: هرم مربعی منتظمی به طول ضلع مربع $a=۶\,cm$ و ارتفاع $h=۴\,cm$ مفروض است: *(مشابه تمرین کتاب درسی)*



الف) مساحت کل هرم را به دست آورید.

ب) حجم هرم را محاسبه نمایید.

پاسخ: الف) مساحت کل هرم شامل مجموع مساحت قاعده و مساحت وجه‌های جانبی است برای مساحت وجه جانبی که هر کدام مثلث‌اند باید ارتفاع را به دست آورد، ارتفاع مثلث را با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس پیدا می‌کنیم.

$$h'^{۲}=۴^{۲}+۳^{۲}\Rightarrow h'^{۲}=۱۶+۹=۲۵\Rightarrow h'=۵\,cm$$

$$S_{\Delta}=\frac{۱}{۲}\times۶\times۵=۱۵\,cm^{۲}$$

$$S_{\text{قاعده}}=۶^{۲}=۳۶\,cm^{۲}$$

$$S_{\text{کل}}=S_{\text{قاعده}}+۴S_{\Delta}=۳۶+۴\times۱۵=۹۶\,cm^{۲}$$

ب) حجم هرم با مساحت قاعده‌ی ۳۶ و ارتفاع ۴ برابر است با:

$$V=\frac{۱}{۳}\times۳۶\times۴=۴۸\,cm^{۳}$$

مخروط

مخروط قائم — مخروط مایل

مخروط شکلی فضایی شبیه هرم است که قاعده‌ی آن به جای چندضلعی، دایره است.

پاره‌خطی که رأس مخروط را به مرکز دایره‌ی قاعده وصل می‌کند، محور مخروط نام دارد.

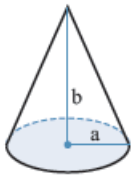
اگر محور بر قاعده عمود باشد، مخروط، قائم و در غیر این صورت مایل نامیده می‌شود.

حجم مخروط: حجم یک مخروط با شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر است با:

$$V=\frac{۱}{۳}S_{\text{قاعده}}\times h$$

$$V=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$$

مثال: شعاع قاعده‌ی یک مخروط a و ارتفاع آن b است. برای هر کدام از موارد زیر عبارتی برحسب a و b پیدا کنید. *(تمرین کتاب درسی)*



الف) حجم مخروط

ب) حجم مخروطی با همین شعاع قاعده اما ارتفاع دو برابر

ج) حجم مخروطی با همین ارتفاع اما شعاع دو برابر

د) حجم مخروطی با ارتفاع دو برابر و شعاع قاعده‌ی دو برابر

پاسخ: با توجه به رابطه‌ی $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ (r: شعاع قاعده و h: ارتفاع) حجم مخروط را در هر قسمت به دست می‌آوریم.

الف) $V=\frac{1}{3}\pi a^2 b$ $(r=b\,,h=b)$

ب) $V=\frac{1}{3}\pi a^2(2b)=\frac{2}{3}\pi a^2 b$ $(r=a\,,h=2b)$

ج) $V=\frac{1}{3}\pi(2a)^2(b)=\frac{4}{3}\pi a^2 b$ $(r=2a\,,h=b)$

د) $V=\frac{1}{3}\pi(2a)^2(2b)=\frac{8}{3}\pi a^2 b$ $(r=2a\,,h=2b)$

مثال: حجم مخروط چه تغییری می‌کند اگر:

الف) ارتفاع آن دو برابر شود اما شعاع قاعده تغییر نکند. *(تمرین کتاب درسی)*

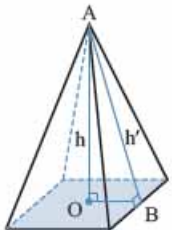
ب) شعاع قاعده دو برابر شود ولی ارتفاع تغییر نکند.

پاسخ:

الف) $V_1=\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1$, $V_2=\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2$ $\xrightarrow[r_1=r_2]{h_2=2h_1}$ $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\cancel{\frac{1}{3}}\cancel{\pi}\cancel{r_1^2}\cancel{h_1}}{\cancel{\frac{1}{3}}\cancel{\pi}\cancel{r_1^2}(2\cancel{h_1})}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}\Rightarrow V_2=2V_1$ حجم دو برابر می‌شود

ب) $V_1=\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1$, $V_2=\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2$ $\xrightarrow[r_2=2r_1]{h_1=h_2}$ $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi(2r_1)^2 h_1}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{4}\Rightarrow V_2=4V_1$ حجم ۴ برابر می‌شود

مثال: در شکل روبه‌رو با توجه به اندازه‌های داده‌شده، حجم هرم مربعی منتظم را به دست آورید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*



$h'=5\ ,\ h=3$

پاسخ: با توجه به این‌که OA بر صفحه‌ی مربعی، عمود شده است پس مثلث OAB قائم‌الزاویه است اگر OB را به دست آورده و دو برابر نماییم ضلع مربع به دست می‌آید. (چون O وسط مربع است)

$\overset{\Delta}{OAB}: h^2+OB^2=h'^2\Rightarrow 3^2+OB^2=5^2\Rightarrow OB^2=25-9=16\Rightarrow OB=4$

(ضلع مربع) $a=2\times 4=8$

$V=\frac{1}{3}\times S_{\text{قاعده}}\times h=\frac{1}{3}(8)^2\times 3=64$

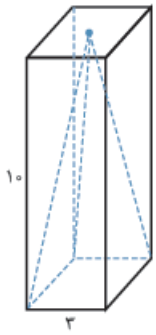
مسائل

۱۸- طول ضلع قاعده‌ی هرم مربع‌القاعده‌ی منتظمی ۸ و ارتفاع هرم ۷ می‌باشد، مطلوبست:

الف) طول یال هرم

ب) حجم هرم

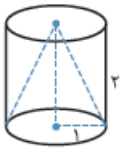
۱۹- حجم ناحیه‌ی محصور بین هرم و مکعب‌مستطیل را به دست آورید (قاعده‌ی هرم و مکعب‌مستطیل، مربع است)



۲۰- حجم چهاروجهی منتظمی را حساب کنید که ارتفاع آن ۴ سانتی‌متر باشد. *(تمرین کتاب درسی)*

۲۱- مربعی به ضلع ۴ سانتی‌متر را حول یکی از قطرهایش دوران داده‌ایم. حجم شکل حادث از دوران را محاسبه نمایید.

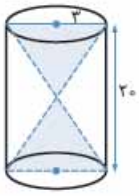
۲۲- با توجه به شکل مقابل حجم و فضای مابین استوانه و مخروط را به دست آورید. $(h=2\,cm\ ,\ r=1\,cm)$



۲۳- یک مثلث قائم‌الزاویه را که یک زاویه‌ی آن ۶۰ درجه است، حول وتر دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل از دوران را حساب کنید.

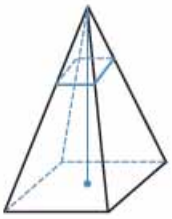
۲۴- قاعده‌ی یک هرم منتظم، مربعی به طول ضلع ۱۲ است. اگر طول یال هرم ۱۰ باشد، مساحت جانبی آن چه‌قدر است؟

۲۵- در شکل روبه‌رو، حجم محصور بین دو مخروط و استوانه چه‌قدر است؟ (دو مخروط هم‌اندازه هستند)



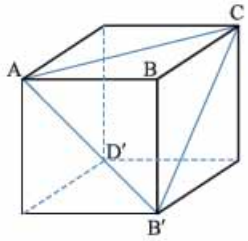
(تمرین کتاب درسی)

۲۶- در هرم روبه‌رو مساحت قاعده ۱۶ و ارتفاع هرم ۴ است. صفحه‌ای موازی با قاعده‌ی هرم طوری رسم شده است که ارتفاع هرم را به نسبت ۱ و ۳ تقسیم شده است. حجم محدود به دو صفحه‌ی موازی چه‌قدر است؟



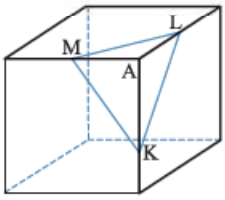
۲۷- مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع a را حول یک ارتفاع آن دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل را برحسب a بیابید.

۲۸- مطابق شکل، صفحه‌ی گذرنده از رئوس A، B′ و C از مکعب به طول ضلع a، آن را به دو بخش تقسیم کرده است. نسبت حجم‌های این دو قسمت را بیابید.

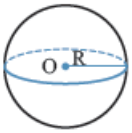


۲۹- مخروطی به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۶ واحد را با صفحه‌ای موازی صفحه‌ی قاعده و به فاصله‌ی ۴ واحد از آن، قطع کرده‌ایم. حجم مخروط جداشده چه‌قدر است؟

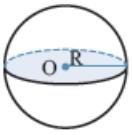
۳۰- در مکعب شکل مقابل K، L و M وسط‌های سه یال هستند: حجم هرم AMLK چه کسری از حجم مکعب است؟



کره



مجموعه‌ی نقاطی از فضا که از نقطه‌ی ثابت (O) به فاصله‌ی ثابت (R) باشند، کره نام دارد. O مرکز کره و R شعاع کره نام دارد.



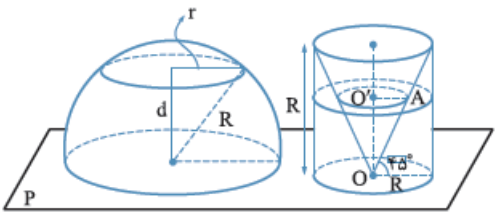
اگر یک صفحه، کره‌ای را قطع نماید، فصل مشترک صفحه با کره، یک دایره است. اگر صفحه‌ی مذکور، از مرکز دایره بگذرد، سطح مقطع ایجادشده (دایره) دایره‌ی عظیمه‌ی کره نام دارد.

مانند بقیه‌ی اشکال فضایی، برای کره نیز حجم و مساحت رویه (یا پوسته) را محاسبه می‌کنیم.

حجم کره: حجم کره به شعاع R برابر است با $V=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$

اثبات: ابتدا حجم نیم‌کره را حساب می‌کنیم، نیم‌کره‌ای به شعاع R که دایره‌ی عظیمه‌ی آن در صفحه‌ی P باشد، فرض می‌کنیم. استوانه‌ی قائمی نیز به شعاع قاعده و ارتفاع R که در داخل آن مخروطی جدا شده است، در نظر گرفته که قاعده‌ی این استوانه نیز روی صفحه‌ی P قرار گرفته باشد.

اگر صفحه‌ای به موازات صفحه‌ی P و به فاصله‌ی d از آن، دو جسم را قطع کند، سطح مقطع حاصل با کره، یک دایره و با استوانه یک نوار دایره‌ای‌شکل است.



مساحت سطح مقطع اول را S_1 و مساحت دومی را S_2 می‌نامیم. $S_1=\pi r^2 \Rightarrow S_1=\pi(R^2-d^2)$ (۱)

در استوانه نیز شعاع قاعده و ارتفاع با هم برابرند و مثلث AOO' قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است در نتیجه $A\hat{O}O'=45^\circ$ و هم‌چنین $O'A=OO'=d$ در نتیجه داریم:

$$S_2=\pi r^2-\pi(O'A)^2 \xrightarrow{O'A=d} S_2=\pi R^2-\pi d^2=\pi(R^2-d^2) \quad (2)$$

از دو رابطه‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $S_1=S_2$ و طبق اصل کاوالیر نیز نتیجه می‌شود که حجم این دو جسم با هم برابر است.

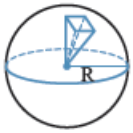
$$V_{\text{نیم‌کره}}=V_{\text{استوانه}}-V_{\text{مخروط}}=(\pi R^2\cdot R)-(\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R)=\frac{2}{3}\pi R^3$$

حجم کره نیز دو برابر حجم نیم‌کره است پس:

$$V_{\text{کره}}=2(\frac{2}{3}\pi R^3)=\frac{4}{3}\pi R^3$$

مساحت کره: مساحت سطح (یا رویه) کره به شعاع R برابر است با: $S=4\pi R^2$

اثبات: کره به شعاع R در نظر گرفته، کره را به شبه هرم‌هایی تقسیم می‌کنیم که رأس‌ها مرکز کره و قاعده‌ی آن‌ها روی سطح کره قرار گیرد، هر چه تعداد شبه هرم‌ها بیشتر شود، قاعده‌ی آن‌ها کوچک‌تر و به هرمی که قاعده‌ی مسطح دارد نزدیک‌تر می‌شود. در نتیجه می‌توان حجم این شبه هرم‌ها را به حجم هرم تقریب زد. اگر مساحت قاعده‌های آن‌ها را S_1، S_2، ... و S_n بنامیم (n به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد) می‌توانیم حجم کره را به صورت مجموع شبه‌هرم‌ها بنویسیم:



$$V_{\text{کره}}=V_1+V_2+\cdots+V_n=\frac{1}{3}RS_1+\frac{1}{3}RS_2+\cdots+\frac{1}{3}RS_n$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{3}R\underbrace{(S_1+S_2+\cdots+S_n)}_{\text{مساحت سطح کره}} \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{3}RS \Rightarrow S=4\pi R^2$$

مثال: کره‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر مفروض است. مطلوب است:

الف) مساحت کره

ب) حجم کره

پاسخ:

الف) $S=4\pi r^2=4\pi\times 2^2=16\pi$

ب) $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\times 2^3=\frac{32\pi}{3}$

مسائل

۳۱- دو کره یکی به شعاع ۱ و دیگری به شعاع ۲ مفروض‌اند: *(تمرین کتاب درسی)*

الف) مساحت سطح هر کدام از آن‌ها را پیدا کنید.

ب) حجم هر یک را به دست آورید.

ج) اگر شعاع یک کره دو برابر شود، مساحت آن چه تغییری می‌کند؟

د) اگر شعاع یک کره دو برابر شود، حجم آن چه تغییری می‌کند؟

۳۲- مشابه سه‌بعدی یک نیم‌دایره، نیم‌کره است. چون محیط یک دایره به شعاع r برابر است با $2\pi r$. محیط یک نیم‌دایره $\frac{1}{2}(2\pi r)=\pi r$ است. فرض کنید شعاع نیم‌کره r باشد: برای هر یک از موارد زیر فرمولی به دست آورید. *(تمرین کتاب درسی)*

الف) حجم نیم‌کره

ب) مساحت کل نیم‌کره

۳۳- مساحت یک کره 36π سانتی‌متر مربع است. *(تمرین کتاب درسی)*

الف) شعاع این کره را به دست آورید.

ب) حجم کره را محاسبه نمایید.

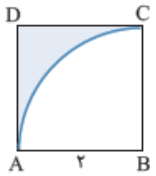
۳۴- مساحت و حجم کره‌ای را به دست آورید که از دوران یک نیم‌دایره به قطر ۶ حول قطرش پدید می‌آید.

۳۵- مکعبی در یک کره محاط شده است. حجم کره چند برابر حجم مکعب است؟

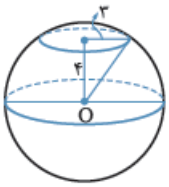
۳۶- مکعبی در یک کره به شعاع $2\sqrt{3}$ محاط شده است. مساحت سطح کل مکعب چه‌قدر است؟

۳۷- کره‌ای به شعاع ۳ واحد در مکعبی محاط شده است. اندازه‌ی قطر مکعب را حساب کنید.

۳۸- در شکل مقابل اگر مربع حول ضلع AB دوران کند از دوران قسمت سایه‌خورده چه حجمی به وجود می‌آید؟



۳۹- در نیم‌کره‌ای به شعاع R مطابق شکل، صفحه‌ای به موازات دایره‌ی عظیمه و به فاصله‌ی ۴ cm از نقطه‌ی O آن را قطع کرده است. اگر شعاع مقطع دایره‌ای مساوی ۳ cm باشد، مساحت و حجم نیم‌کره را به دست آورید.



۴۰- در مخروط قائمی که شعاع قاعده‌اش ۳ و ارتفاعش ۴ است، کره‌ای محاط کرده‌ایم. مساحت کره را حساب نمایید.

پاسخ مسائل

۱- قطر وجه مکعب برابر است با $a\sqrt{2}$ در نتیجه:

$$a\sqrt{2}=5 \Rightarrow a=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{کل}=6a^2=6(\frac{5\sqrt{2}}{2})^2=75$$

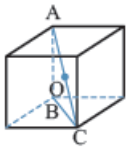
۲- $d'=3d \Rightarrow a'\sqrt{3}=3(a\sqrt{3}) \Rightarrow a'=3a$

d' قطر مکعب جدید و a' نیز ضلع این مکعب است.

$$V'=a'^3 \Rightarrow V'=(3a)^3 \Rightarrow V'=27\underbrace{a^3}_{V}$$

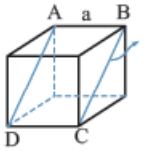
حجم جدید ۲۷ برابر حجم قبلی می‌باشد.

۳- نقطه‌ای که از همه‌ی رأس‌های مکعب به یک فاصله است، محل تلاقی قطرهای مکعب یعنی O و وسط AC است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، OB میانه‌ی وارد بر وتر است که نصف آن است.



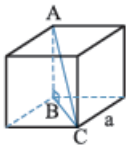
$$OB=\frac{AC}{2} \Rightarrow DB=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$AC=1\sqrt{3}$$

۴- چهارضلعی ABCD مستطیل به ابعاد a و $a\sqrt{2}$ است.



$$S_{ABCD}=a\times a\sqrt{2}=a^2\sqrt{2}$$
$$3\sqrt{2}=a^2\sqrt{2} \Rightarrow a^2=3 \Rightarrow a=\sqrt{3}$$
$$S_{کل}=6a^2=6(\sqrt{3})^2=18$$

۵- مثلث ABC قائم‌الزاویه است زیرا AB و BC بر هم عمودند.

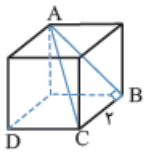


$$S_{قاعده}=a^2 \Rightarrow 9=a^2 \Rightarrow a=3$$

قطر مربع قاعده $BC=3\sqrt{2}$

$$AB^2+BC^2=AC^2$$
$$\Rightarrow AB^2+(3\sqrt{2})^2=(\sqrt{34})^2$$
$$\Rightarrow AB^2=34-18 \Rightarrow AB=4$$
$$V_{مکعب}=S_{قاعده}\times AB_{ارتفاع} \Rightarrow V=9\times 4=36$$

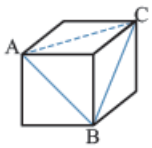
۶- پاره‌خط AB قطر وجه مکعب است و چون BC بر صفحه‌ی شامل AB عمود است، در نتیجه بر AB نیز عمود است پس مثلث ABC در رأس B قائمه است. $BC=2\ ,\ AB=2\sqrt{2}$



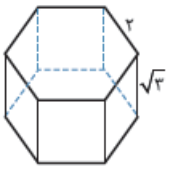
مثلث ABC قائم‌الزاویه است در نتیجه:

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}AB\times BC=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2=2\sqrt{2}$$

۷- $AC=AB=BC$ است زیرا هر سه پاره‌خط قطرهای وجوه مکعب هستند؛ در نتیجه مثلث ABC یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. بنابراین اندازه‌ی زاویه‌ی ABC برابر است با 60°.

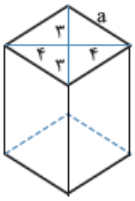


۸- مساحت یک شش‌ضلعی طبق روابط از قبل ثابت‌شده برابر است با $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$؛ پس مساحت دو قاعده‌ی منشور برابر است با $2(\frac{3a^2\sqrt{3}}{2})$ و هم‌چنین شش وجه منشور، مستطیل به ابعاد ۲ و $\sqrt{3}$ است. در نتیجه مساحت کل منشور برابر است با:



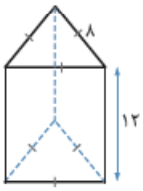
$$S_{کل}=2(\frac{3a^2\sqrt{3}}{2})+6(2\times\sqrt{3})=3\times 2^2\sqrt{3}+12\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow S_{کل}=24\sqrt{3}$$

۹- قاعده‌ی منشور لوزی است و مساحت آن برابر است با $\frac{6\times 8}{2}=24$؛ پس مساحت دو قاعده‌ی آن برابر است با $2\times 24=48$. قاعده‌ی منشور، لوزی است و برای به دست آوردن ضلع لوزی از رابطه‌ی فیثاغورس استفاده می‌نماییم.



$$a^2=3^2+4^2 \Rightarrow a^2=25 \Rightarrow a=5$$
$$S_{جانبی}=ارتفاع\times محیط\ قاعده=4\times 5\times 12=240$$
$$S_{کل}=S_{جانبی}+2S_{قاعده}=240+48=288$$

۱۰- مساحت جانبی برابر است با مساحت سه وجه اطراف به ابعاد ۸ و ۱۲

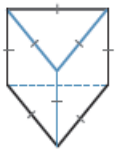


$$S_{جانبی}=3(8\times 12)=288$$

مساحت کل این منشور برابر است با مجموع مساحت‌های دو مثلث متساوی‌الاضلاع و مساحت جانبی. مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع از رابطه‌ی $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ به دست می‌آید.

$$S_{\Delta}=\frac{8^2\sqrt{3}}{4}=16\sqrt{3}$$
$$S_{کل}=S_{جانبی}+2S_{\Delta}=288+2(16\sqrt{3})=288+32\sqrt{3}$$

۱۱- منشور روبه‌رو شامل سه وجه مربعی و دو وجه قاعده‌ی آن مثلث متساوی‌الاضلاع است.



الف) مساحت هر وجه جانبی برابر است با $4\times 4=16$ و مساحت قاعده‌ی آن $\frac{4^2\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$ در نتیجه: $S_{جانبی}=3(16)+2(4\sqrt{3})=48+8\sqrt{3}$

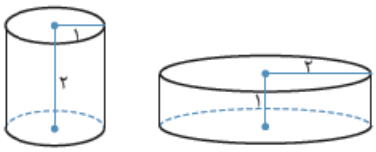
ب) ارتفاع منشور برابر است با یال آن یعنی $h=4$

ج) حجم منشور برابر است با حاصل‌ضرب مساحت یک مثلث در ارتفاع آن. $V=4\sqrt{3}\times 4=16\sqrt{3}$

۱۲- الف طبق درس‌نامه‌ی استوانه مساحت جانبی هر استوانه (قائم) مساحت یک مستطیل است به طول محیط قاعده و عرض ارتفاع پس:

$$\begin{cases} S_{۱\,\text{جانبی}} = ۲\pi r_۱ h_۱ = ۲\pi \times ۱ \times ۲ = ۴\pi \\ S_{۲\,\text{جانبی}} = ۲\pi r_۲ h_۲ = ۲\pi \times ۲ \times ۱ = ۴\pi \end{cases}$$

$\Rightarrow$ مساحت جانبی دو استوانه برابرند



ب حجم استوانه برابر است با حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن.

$V_۱ = \pi r_۱^۲ h_۱ = \pi \times ۱^۲ \times ۲ = ۲\pi$

$V_۲ = \pi r_۲^۲ h_۲ = \pi \times ۲^۲ \times ۱ = ۴\pi$

$\frac{V_۲}{V_۱} = \frac{۴\pi}{۲\pi} = ۲$

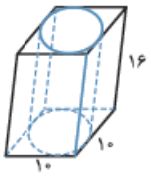
حجم استوانه‌ی دوم، ۲ برابر حجم استوانه‌ی اول است؛ چون شعاع آن ۲ برابر می‌باشد.

۱۳- الف مساحت کل استوانه برابر است با مجموع مساحت دو قاعده با مساحت جانبی آن.

شعاع قاعده برابر است با نصف ضلع مربع

مساحت دو قاعده $= ۲(\pi r^۲) = ۲(\pi \times ۵^۲) = ۵۰\pi$

مساحت جانبی $= ۲\pi rh = ۲\pi \times ۵ \times ۱۶ = ۱۶۰\pi$



$S_{\text{کل}} = ۵۰\pi + ۱۶۰\pi = ۲۱۰\pi$

$V = \pi r^۲ h = \pi \times (۵)^۲ \times ۱۶ = ۴۰۰\pi$

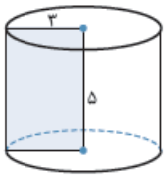
ب برای پیداکردن حجم ناحیه‌ی بین استوانه و مکعب‌مستطیل باید تفاضل حجم‌ها را به دست آوریم.

$V_{\text{مکعب}} = ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۶ = ۱۶۰۰$

$V_{\text{استوانه}} = \pi r^۲ h = \pi \times ۵^۲ \times ۱۶ = ۴۰۰\pi$

$V_{\text{فضای بین مکعب و استوانه}} = |۱۶۰۰ - ۴۰۰\pi| \simeq ۳۴۴$

۱۴- از دوران یک مستطیل حول یک ضلع آن یک استوانه ایجاد می‌گردد طبق شکل. چون این مستطیل حول ضلع ۵ دوران داده شده است، بنابراین ارتفاع استوانه ۵ است و شعاع آن ۳ سانتی‌متر در نتیجه:



$h = ۵ \ , \ r = ۳$

$S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + ۲S_{\text{قاعده}}$

$S_{\text{کل}} = ۲\pi rh + ۲\pi r^۲ = ۲\pi \times ۳ \times ۵ + ۲(\pi \times ۳^۲)$

$\Rightarrow S_{\text{کل}} = ۴۸\pi$

۱۵- اگر حجم استوانه‌ی اول V و حجم استوانه‌ی دوم را V' بنامیم، طبق تعریف حجم هر استوانه از حاصل‌ضرب مساحت قاعده (S) در ارتفاع آن به دست می‌آید.

$V = V' \Rightarrow S \times h = S' \times h' \xrightarrow{S = ۳S'} ۳\cancel{S'} \times h = \cancel{S'} \times h'$

$\Rightarrow ۳h = h' \qquad (۱)$

$S_{\text{جانبی}} = ۲\pi rh$

$S'_{\text{جانبی}} = ۲\pi r'h'$

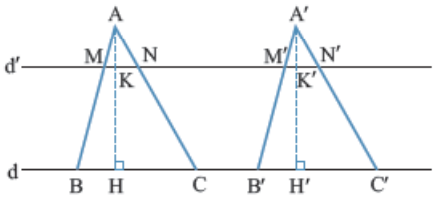
$\Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{r \cdot h}{r' \cdot h'} \xrightarrow{(۱)} \frac{S}{S'} = \frac{r(۳\cancel{h'})}{r' \cdot \cancel{h'}}$

$\Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{۳r}{r'}$

از طرف دیگر وقتی $S_{\text{قاعده}} = ۳S'_{\text{قاعده}}$ در نتیجه $\cancel{\pi} r^۲ = ۳\cancel{\pi} r'^۲$ و داریم $r = r'\sqrt{۳}$ اگر در رابطه‌ی بالا جایگزینی کنیم، داریم:

$\frac{S_{\text{جانبی}}}{S'_{\text{جانبی}}} = \frac{۳r}{r'} \Rightarrow \frac{۳ \times r' \times \sqrt{۳}}{r'} = ۳\sqrt{۳}$

۱۶- دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را با فرض ($BC = B'C'$ و $AH = A'H'$) در نظر بگیرید. خط دلخواه d' را موازی d رسم کرده تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در M و N و $A'B'$ و $A'C'$ را در M' و N' قطع کرده و هم‌چنین ارتفاع AH را در K و $A'H'$ را در K' قطع نماید طبق قضیه‌ی اصلی تشابه داریم:



$\overset{\Delta}{ABC} : MN \parallel BC \Rightarrow \overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AK}{AH}$

$\Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AH - KH}{AH} \Rightarrow MN = \frac{BC(AH - KH)}{AH} \qquad (۱)$

$\overset{\Delta}{A'B'C'} : M'N' \parallel B'C' \Rightarrow \overset{\Delta}{A'M'N'} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \frac{M'N'}{B'C'} = \frac{A'K'}{A'H'}$

$\Rightarrow \frac{M'N'}{B'C'} = \frac{A'H' - K'H'}{A'H'} \Rightarrow M'N' = \frac{B'C'(A'H' - K'H')}{A'H'} \qquad (۲)$

طبق فرض چون $AH = A'H'$ و $BC = B'C'$ و هم‌چنین $d \parallel d'$ است، در نتیجه $KH = K'H'$ و با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$MN = M'N'$

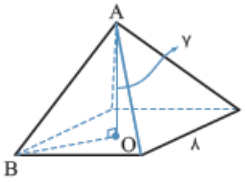
طبق اصل کاوالیری در مورد مساحت، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ مساحت‌های برابر دارند.

۱۷- الف حجم منشور $= S \times h \Rightarrow V_A = ۱۰ \times ۷ = ۷۰\,cm^۳$

ب چون ارتفاع دو منشور مساوی است و هر صفحه‌ی موازی قاعده‌های دو منشور سطح مقطع‌های برابر ایجاد می‌کند در نتیجه طبق اصل کاوالیر حجم دو منشور A و B با هم برابر است پس:

$V_B = V_A = ۷۰\,cm^۳$

۱۸- الف) برای محاسبه‌ی طول یال هرم (AB) از رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث OAB استفاده می‌کنیم: ($OA=۷$ ارتفاع هرم، OB نصف قطر مربع است یعنی $\frac{۸\sqrt{۲}}{۲}=۴\sqrt{۲}$)



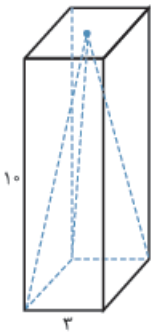
$$AB^۲=OA^۲+OB^۲ \Rightarrow AB^۲=۷^۲+(۴\sqrt{۲})^۲=۸۱ \Rightarrow AB=۹$$

ب) طبق رابطه‌ی گفته‌شده حجم هرم از رابطه‌ی $V=\frac{۱}{۳}S_{قاعده}\times h$ محاسبه می‌گردد.

$$V=\frac{۱}{۳}(۸)^۲\times ۷\simeq ۱۵۰$$

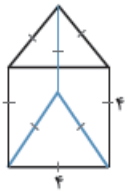
۱۹- $V_{محصور}=V_۱-V_۲=۹۰-۳۰=۶۰$

حجم مکعب‌مستطیل با توجه به قاعده‌ی مربع برابر است با: $V_۱=۳\times۳\times۱۰=۹۰$



حجم هرم نیز از رابطه‌ی $V=\frac{۱}{۳}S\cdot h$ به دست می‌آید که قاعده‌ی آن مربع است با مساحت $S=۹$ و ارتفاع آن یال مکعب‌مستطیل که برابر است با ۱۰. در نتیجه: $V_۲=\frac{۱}{۳}\times۹\times۱۰=۳۰$ و حجم محصور بین دو شکل، تفاضل بین حجم‌هاست.

۲۰- همان‌طور که قبلاً گفته شد، چهاروجهی منتظم هرمی است که قاعده و وجه‌های جانبی آن مثلث متساوی‌الاضلاع است. برای به دست آوردن حجم هرم، مساحت قاعده‌ی آن را از رابطه‌ی مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع یعنی $S=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ به دست آورده و سپس از $V=\frac{۱}{۳}S\cdot h$ استفاده می‌نماییم.



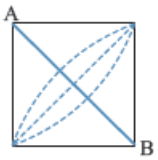
$$S_{قاعده}=\frac{۴^۲\sqrt{۳}}{۴}=۴\sqrt{۳}$$

$$V=\frac{۱}{۳}\times۴\sqrt{۳}\times۴=\frac{۱۶}{۳}\sqrt{۳}$$

۲۱- با دوران‌دادن مربع حول قطر AB دو مخروط برابر ایجاد می‌شود. ارتفاع هر یک از مخروط‌ها نصف قطر مربع است یعنی $h=\frac{۴\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}$ شعاع قاعده‌ی هر مخروط نیز نصف قطر مربع است $r=۲\sqrt{۲}$ در نتیجه طبق رابطه‌ای که قبلاً در مورد حجم مخروط گفته شد، داریم:

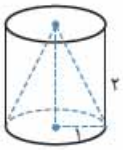
$$V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h \Rightarrow V=\frac{۱}{۳}\pi\times(۲\sqrt{۲})^۲\times۲\sqrt{۲}=\frac{۱۶\sqrt{۲}\,\pi}{۳}$$

حجم کل شکل که شامل دو مخروط مساوی است، برابر می‌شود با:



$$V_{کل}=۲\times\frac{۱۶\sqrt{۲}}{۳}\pi=\frac{۳۲\sqrt{۲}\,\pi}{۳}$$

۲۲- حجم استوانه را $V_۱$ و حجم مخروط را $V_۲$ می‌نامیم و با توجه به روابط هر کدام را محاسبه نموده و حجم محصور یعنی تفاضل بین دو حجم را به دست می‌آوریم.

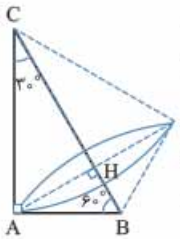


$$V_۱=\pi r^۲h=\pi\times۱^۲\times۲=۲\pi$$

$$V_۲=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h=\frac{۱}{۳}\pi\times۱^۲\times۲=\frac{۲\pi}{۳}$$

$$V_{محصور}=V_۱-V_۲=۲\pi-\frac{۲\pi}{۳}=\frac{۴\pi}{۳}$$

۲۳- اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را حول BC دوران دهیم، طبق شکل دو مخروط ایجاد می‌شود که اگر وتر مثلث را a در نظر بگیریم، ضلع AB روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰ است؛ پس نصف وتر است. $BC=a \Rightarrow AB=\frac{a}{۲}$



در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر ارتفاع وارد بر وتر را رسم نماییم، داریم:

$$AB^۲=BH\times BC$$

$$\frac{a^۲}{۴}=BH\times a \Rightarrow BH=\frac{a}{۴}\ ,\ CH=a-\frac{a}{۴}=\frac{۳a}{۴}$$

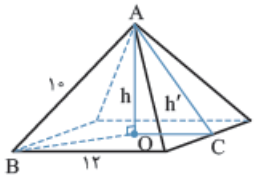
$$AH^۲=BH\times CH \Rightarrow AH^۲=\frac{a}{۴}\times\frac{۳a}{۴}=\frac{۳a^۲}{۱۶} \Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{۳}}{۴}$$

$$V_۱=\frac{۱}{۳}\pi(AH)^۲\times BH=\frac{\pi}{۳}\times\frac{۳a^۲}{۱۶}\times\frac{a}{۴}=\frac{\pi a^۳}{۶۴}$$

$$V_۲=\frac{۱}{۳}\pi(AH)^۲\times CH=\frac{\pi}{۳}\times\frac{۳a^۲}{۱۶}\times\frac{۳a}{۴}=\frac{۳\pi a^۳}{۶۴}$$

$$V=V_۱+V_۲=\frac{\pi a^۳}{۱۶}$$

۲۴- برای به دست آوردن مساحت جانبی، باید مساحت وجه جانبی هرم که هر کدام مثلثی هستند به ارتفاع h' و قاعده‌ی ۱۲ به دست آوریم. قبل از آن باید ارتفاع هرم (h) را در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAB به دست آوریم:



$$\overset{\Delta}{OAB}: OA^۲+OB^۲=AB^۲$$

$$\Rightarrow h^۲+(\frac{۱۲\sqrt{۲}}{۲})^۲=۱۰^۲$$

OB نصف قطر مربع است.

$$\Rightarrow h^۲=۲۸ \Rightarrow h=۲\sqrt{۷}$$

$$\overset{\Delta}{OAC}: h^۲+OC^۲=h'^۲ \Rightarrow (۲\sqrt{۷})^۲+۶^۲=h'^۲$$

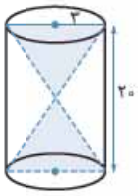
OC نصف ضلع مربع است (O وسط مربع است).

$$\Rightarrow h'^۲=۶۴ \Rightarrow h'=۸$$

$$S_\Delta=\frac{۱}{۲}\times۸\times۱۲=۴۸$$

$$S_{جانبی}=۴\times S_\Delta=۴\times۴۸=۱۹۲$$

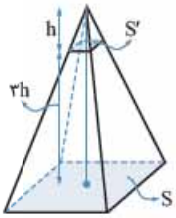
۲۵- حجم استوانه را V_1 و حجم هر مخروط را V_2 می‌نامیم. $V_1 = \pi r^2 h = \pi \times 3^2 \times 20 = 180\pi$



ارتفاع هر مخروط ۱۰ می‌شود چون دو مخروط مساوی‌اند. $V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 10 = 30\pi$

$V_{\text{محصور}} = V_1 - 2V_2 = 180\pi - 2(30\pi) = 120\pi$

۲۶- با توجه به مسئله اگر ارتفاع کل هرم به نسبت ۱ به ۳ تقسیم شده باشد، یعنی:



$h + 3h = 4 \Rightarrow h = 1$

اگر حجم هرم بزرگ را V و حجم هرم کوچک را V′ بنامیم، حجم محدود به دو هرم از تفاضل دو حجم به دست می‌آید.

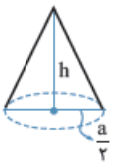
$V = \frac{1}{3}(\text{مساحت دو قاعده}) \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{3} \times 16 \times 4 = \frac{64}{3}$

$V' = \frac{1}{3} \times (\frac{1}{3} \times 16) \times \frac{1}{4} \times 4 = \frac{16}{9}$

لازم به ذکر است چون صفحه‌ی موازی، ارتفاع را به نسبت $\frac{1}{3}$ تقسیم کرده است، مساحت سطح مقطع‌ها نیز به نسبت $\frac{1}{3}$ تقسیم شده است. (طبق تالس)

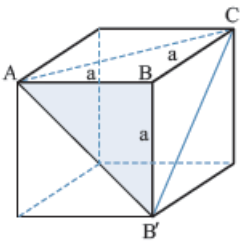
$\text{حجم محدود بین دو هرم} = \frac{64}{3} - \frac{16}{9} = \frac{176}{9}$

۲۷- مثلث متساوی‌الاضلاعی که حول ارتفاع آن دوران پیدا کند، شکل حادث یک مخروط است. به شعاع قاعده‌ی $\frac{a}{2}$ و ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. در نتیجه:



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times (\frac{a}{2})^2 \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24}$

۲۸- اگر ضلع مکعب را a در نظر بگیریم، صفحه‌ی گذرنده از رئوس A، B′ و C یک هرم ایجاد می‌نماید که اگر رأس C، رأس هرم و مثلث ABB′ قاعده‌ی آن باشد، حجم هرم از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

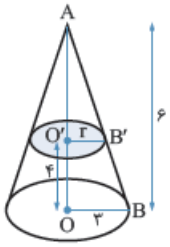


$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3}S \cdot h = \frac{1}{3}(\frac{a \times a}{2}) \times a = \frac{1}{6}a^3$

$V' = V_{\text{مکعب}} - V_{\text{هرم}} = a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{5a^3}{6}$ حجم شکل باقی‌مانده از مکعب

$\frac{V}{V'} = \frac{\frac{\cancel{a^3}}{\cancel{6}}}{\frac{5\cancel{a^3}}{\cancel{6}}} = \frac{1}{5}$

۲۹- با توجه به مسئله، ارتفاع مخروط کوچک برابر ۲ است. $(OA' = 2)$



$\overset{\Delta}{OAB} : O'B' \parallel OB$

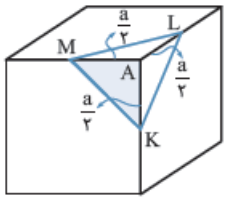
$\xrightarrow{\text{قضیه‌ی تالس}} \frac{O'A}{OA} = \frac{O'B'}{OB}$

$\Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{O'B'}{3} \Rightarrow O'B' = 1 \Rightarrow r = 1$

حجم مخروط جداشده $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 1^2 \times 2 = \frac{2\pi}{3}$

۳۰- K، L و M وسط یال‌های مکعب هستند. اگر طول ضلع مکعب را a در نظر بگیریم $(AL = AM = AK = \frac{a}{2})$ هرم AMLK را به رأس L در نظر بگیریم قاعده‌ی آن مثلث قائم‌الزاویه‌ی AMK است، در نتیجه:

$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3}S_{\text{قاعده}} \times h = \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2}) \times \frac{a}{2} = \frac{a^3}{48}$



$\frac{V_{\text{هرم}}}{V_{\text{مکعب}}} = \frac{\frac{a^3}{48}}{a^3} = \frac{1}{48}$

۳۱- الف) مساحت هر کره از رابطه‌ی $S = 4\pi r^2$ به دست می‌آید.

$S_1 = 4\pi(1)^2 = 4\pi \qquad S_2 = 4\pi(2)^2 = 16\pi$

ب) حجم کره نیز از رابطه‌ی $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ به دست می‌آید.

$V_1 = \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4}{3}\pi \qquad V_2 = \frac{4}{3}\pi(2)^3 = \frac{32\pi}{3}$

ج) اگر شعاع کره‌ی اول را برای مثال دو برابر نماییم، مساحت آن در حالت دوم برابر است با: $S'_1 = 4\pi(2)^2 = 8\pi$

و با مساحت اولیه مقایسه نماییم، داریم: $\frac{S'_1}{S_1} = \frac{8\pi}{4\pi} = 2$

د) اگر برای همان کره‌ی اول حجم را با تغییر شعاع محاسبه نماییم، داریم: $V'_1 = \frac{4}{3}\pi(2)^3 = \frac{32\pi}{3}$

$\frac{V'_1}{V_1} = \frac{\frac{32\cancel{\pi}}{\cancel{3}}}{\frac{4}{\cancel{3}}\cancel{\pi}} = 8$

۳۲- الف) حجم نیم‌کره به شعاع r $= \frac{1}{2}(\frac{4}{3}\pi r^3) = \frac{2}{3}\pi r^3$

مساحت رویه‌ی نیم‌کره به شعاع r شکل $= \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi r^2$

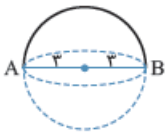
ب) مساحت کل نیم‌کره به شعاع r =

مساحت دایره‌ی عظیمه + مساحت نیم‌کره $= 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$

۳۳- الف) $S=4\pi r^2 \Rightarrow \cancel{36}^{9}\cancel{\pi}=4\cancel{\pi}r^2 \Rightarrow r=3$

ب) $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\times 3^3=36\pi$

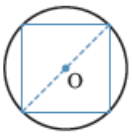
۳۴- از دوران نیم‌دایره‌ی به قطر ۶ حول AB یک کره ایجاد می‌شود که شعاع آن ۳ است.



$S=4\pi r^2=4\pi\times 3^2=36\pi$

$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\times 3^3=36\pi$

۳۵- وقتی یک مکعب در کره محاط شده باشد، یعنی قطر مکعب بر قطر کره منطبق است؛ در نتیجه شعاع کره برابر است با نصف قطر مکعب. اگر ضلع مکعب را a در نظر بگیریم، داریم:



$r=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$V_{\text{مکعب}}=a^3$

$V'_{\text{کره}}=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(\frac{a\sqrt{3}}{2})^3=a^3\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

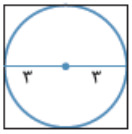
$\frac{V'}{V}=\frac{\pi a^3\frac{\sqrt{3}}{2}}{a^3}=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

۳۶- برای مساحت کل مکعب باید ضلع مکعب را به دست آوریم. شعاع کره، نصف قطر مکعب است و قطر مکعب نیز برابر است با $a\sqrt{3}$ در نتیجه:

$2\times 2\sqrt{3}=a\sqrt{3} \Rightarrow a=4$

$S_{\text{کل}}=6a^2=6\times 4^2=96$

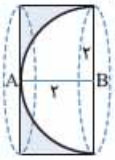
۳۷- در این مسئله کره داخل مکعب قرار گرفته و ضلع مکعب برابر است با قطر کره؛ پس ضلع مکعب برابر است با ۶ واحد.



$a=6$

قطر مکعب $=a\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

۳۸- از دوران مربع حول ضلع AB، استوانه‌ای به ارتفاع AB و به شعاع BC ایجاد می‌شود که از دوران ربع دایره نیز حول AB یک نیم‌کره ایجاد می‌شود؛ در نتیجه برای به دست آوردن حجم ناحیه‌ی سایه‌خورده باید حجم استوانه و نیم‌کره را از هم کم کنیم.



$AB=BC=2$

$V_{\text{استوانه}}=\pi r^2 h=\pi\times 2^2\times 2=8\pi$

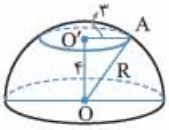
$V'_{\text{نیم‌کره}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{6}\times\pi\times 2^3=\frac{16\pi}{3}$

حجم ناحیه‌ی سایه‌خورده $=V-V'=8\pi-\frac{16\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}$

۳۹- از O به A وصل کرده طول OA برابر است با شعاع نیم‌کره‌ی شکل.

$\overset{\Delta}{OO'A}: R^2=O'A^2+OO'^2$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OO′A رابطه‌ی فیثاغورس می‌نویسیم.



$R^2=3^2+4^2=25 \Rightarrow R=5$

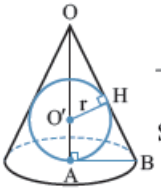
$S_{\text{نیم‌کره}}=2\pi r^2=2\pi\times 5^2=50\pi$

$V_{\text{نیم‌کره}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{2}{3}\pi\times 5^3=\frac{250}{3}\pi$

۴۰- دو مثلث OO′H و OAB متشابه‌اند پس داریم:

$(1)\quad \frac{r}{AB}=\frac{OO'}{OB}$

از طرف دیگر $OO'=OA-O'A=4-r$ و نیز در مثلث OAB چون دو ضلع قائمه هستند، پس با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس $OB=5$ است.



$\xrightarrow{(1)} \frac{r}{3}=\frac{4-r}{5} \Rightarrow 5r=12-3r \Rightarrow r=\frac{3}{2}$

$S_{\text{کره}}=4\pi r^2=4\pi(\frac{3}{2})^2=9\pi$